# KESTABILAN TITIK *EQUILIBRIUM* MODEL SIR (*SUSCEPTIBLE, INFECTED, RECOVERED*) PENYAKIT FATAL DENGAN MIGRASI

## TUGAS AKHIR

Disusun sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh:


**<u>LENI DARLINA</u>**
**10754000376**


UIN SUSKA RIAU

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU**
**PEKANBARU**
**2012**

# KESTABILAN TITIK *EQUILIBRIUM* MODEL SIR (*SUSCEPTIBLE*, *INFECTED*, *RECOVERED*) PENYAKIT FATAL DENGAN MIGRASI

**LENI DARLINA**
**10754000376**

Tanggal Sidang : 29 Juni 2012
Periode Wisuda : 2012

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

## ABSTRAK

Tugas Akhir ini membahas tentang penyebaran penyakit fatal menggunakan model SIR. Pada model ini diasumsikan terjadi kelahiran dan kematian alami dalam populasi, kematian akibat penyakit yang dibicarakan dan juga terjadi migrasi. Hasil yang diperoleh yaitu jika $b + \rho_1 < \rho_2 + \mu$ dan jika $\beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} < \rho_2 - \rho_1 + m + \mu + \alpha,$ titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik, sebaliknya jika $b + \rho_1 < m + \rho_2 + \mu + \alpha$ dan jika $b\beta + \rho_1 > \rho_2 + \mu$ titik kesetimbangan endemik penyakit stabil asimtotik.

**KataKunci** : Fatal, Migrasi, Model SIR, Stabil Asimtotik, Titik Kesetimbangan.

# KATA PENGANTAR

Syukur-*Alhamdulillah*, penulis ucapkan kehadirat ALLAH SWT atas segala limpahan taufik dan hidayahNya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan judul **"Kestabilan Titik *Equilibrium* Model SIR Penyakit Fatal dengan Migrasi"**. Shalawat beriring salam tak lupa penulis sampaikan kepada Nabi Muhammad SAW, berkat beliau penulis bisa merasakan ilmu pengetahuan seperti saat ini.

Dalam penyelesaian Tugas Akhir ini, penulis banyak mendapat dorongan, bimbingan, bantuan, dan nasehat dari berbagai rekan. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga terutama kepada Ayah dan Ibunda tercinta yang selalu senantiasa mencurahkan kasih-sayang serta doa yang tiada hentinya. Kemudian adik-adikku yang sangat ku sayang, yang telah memberikan dukungan dan menjadi penyemangatku sehingga penulis termotivasi dalam penyelesaian Tugas Akhir ini. Semoga Allah SWT memberikan kebahagiaan dunia dan akhirat kepada kita semua. Amiin ya robbal 'alamin. Selanjutnya ucapan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. Muhammad Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Drs. Martius, M.Hum selaku Pembantu Dekan III dan Ketua Sidang Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
5. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc selaku dosen yang telah menentukan pembimbing tugas akhir ini bagi penulis.
6. Bapak Mohammad Soleh, M.Sc selaku pembimbing yang telah baik hati mau menjadi pembimbing penulis, banyak memberikan bantuan,

mengarahkan dengan baik, dan membimbing penulis dengan penuh kesabaran.

7. Bapak Wartono, M.Sc selaku penguji I yang telah memberikan kritikan dan saran serta perbaikan demi kesempurnaan dalam penulisan Tugas Akhir ini.
8. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc selaku penguji II yang telah memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan Tugas Akhir ini hingga selesai.
9. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku koordinator Tugas Akhir yang telah banyak membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
10. Segenap Dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah membimbing penulis selama kuliah.
11. Temanku Helvi Agustianti Umbari, S.Si, Marisa, Irawati, Devi Anggreni, Siti Rahma, Lia Devega, Sri Damayanti, , Ayu, Ismaneti, Heni, dan Siti Kholifah yang telah menyumbangkan ide beserta bantuannya demi penyelesaian tugas akhir ini. Dan teman-teman lainnya, yang tak dapat disebut satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan dan kesalahan-kesalahan, maka dari itu penulis mohon maaf dan mengharapkan kritik beserta saran dari semua pihak demi kemajuan karya penulis di masa mendatang.

Akhirnya, penulis berharap Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis dan para pembaca sekalian.

Pekanbaru, Juni 2012

Penulis

Leni Darlina

# DAFTAR ISI

# BAB I
# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Penyebaran penyakit merupakan masalah serius yang dihadapi oleh masyarakat karena dapat menimbulkan kematian. Dampak kematian akibat penyakit menimbulkan kerugian besar sehingga sangat meresahkan masyarakat. Penyakit yang dapat menimbulkan kematian atau disebut juga penyakit fatal banyak jenisnya, dan beberapa contoh di antaranya adalah Demam Berdarah, HIV dan Tuberculosis, dan lain-lain. Ketiga penyakit ini termasuk jenis penyakit menular. Penyebaran penyakit-penyakit menular tersebut dipengaruhi diantaranya oleh kepadatan penduduk, migrasi dan lain-lain.

Migrasi atau perpindahan penduduk dari suatu wilayah ke wilayah lain merupakan fenomena yang pasti terjadi. Migrasi terbagi dua, yakni emigrasi dan imigrasi. Emigrasi adalah keluarnya penduduk dari satu wilayah/daerah tertentu ke wilayah/daerah lain. Sedangkan imigrasi adalah sebaliknya, masuknya penduduk dalam populasi dari wilayah lain. Migrasi dapat mempengaruhi penyebaran penyakit karena banyaknya orang-orang yang tidak kebal yang datang dari daerah lain (seperti pengungsi, migrasi ekonomi, atau turis) bisa menjadi penyebab berjangkitnya penyakit menular ke daerah baru yang dimasuki (Purba E.M, 2007). Untuk memprediksi hal tersebut, dapat dilakukan dengan pemodelan matematika.

Pemodelan matematika merupakan salah satu penerapan Ilmu Matematika yang dapat memodelkan berbagai penyebaran penyakit karena matematika dapat digunakan sebagai alat untuk memprediksi penyebaran penyakit, baik untuk penyakit fatal (menyebabkan kematian) maupun yang tidak fatal (tidak menyebabkan kematian).

Model SIR adalah model dasar tentang penyebaran penyakit. Model dasar penyebaran penyakit ini pertama kali dirumuskan oleh Kermack dan

McKendrick pada tahun 1927 (Pratiwi N dan Kartono, 2008). Model SIR adalah model penyebaran penyakit yang membagi populasi total (N) menjadi tiga kelas, yaitu kelas *susceptible* (S) merupakan jumlah individu yang rentan terhadap penyakit dan mudah ditulari penyakit, *infected* (I) adalah kelas yang didalamnya terdapat individu yang terinfeksi penyakit dan mampu menularkan penyakit, dan *recovered* (R) adalah jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit dan telah mengalami kekebalan tubuh terhadap penyakit (imunitas). SIR berkembang menjadi beberapa model matematika di antaranya yaitu model SEIR, MSEIR, SIS, SIAR dan IA.

Adapun penelitian tentang model penyebaran penyakit yang berhubungan dengan model SIR antara lain adalah penelitian dengan judul *Pembuatan model matematika dengan software untuk penghitung tingkat vaksinasi pada penyebaran penyakit menular* tahun 2005 karangan Asep K. Supriatna dkk yang membahas model penyebaran penyakit dengan model SIR dan SIS dengan hasil diperoleh tingkat vaksinasi untuk beberapa keadaan, dan jurnal matematika yang berjudul *Model SIR Penyakit Tidak Fatal* tahun 2007 karangan Husni Tamrin dkk, yang membahas penyebaran penyakit tidak fatal menggunakan model SIR dengan asumsi populasi tertutup atau tidak ada proses migrasi dengan kesimpulan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik jika $\beta < \alpha + \mu$, dan titik kesetimbangan endemik penyakit stabil asimtotik jika $\beta > \alpha + \mu$ .

Berdasarkan keterangan yang telah diuraikan di atas, maka penulis tertarik untuk mengulas tentang model SIR dengan beberapa asumsi seperti adanya kelahiran dan kematian alami yang dapat mempengaruhi penyebaran penyakit dalam suatu populasi, selain itu penulis juga menambahkan asumsi adanya migrasi konstan serta kematian akibat penyakit yang dibicarakan, dengan judul **Kestabilan Titik *Equilibrium* Model SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*) Penyakit Fatal dengan Migrasi".**

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah “Menentukan kestabilan titik *equilibrium* model penyebaran penyakit fatal dengan menggunakan model SIR dan proses migrasi”.

## 1.3 Batasan Masalah

Permasalahan ini hanya dibatasi pada pembahasan mengenai model matematika untuk kestabilan titik *equilibrium* penyebaran penyakit fatal menggunakan model SIR dan dengan migrasi.

## 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian tugas akhir ini antara lain :

a. Untuk menganalisa perkembangan penyebaran penyakit fatal melalui model penyebaran penyakit yaitu model SIR dengan kelahiran dan kematian, dan dengan migrasi.
b. Mengetahui bentuk model SIR Penyakit Fatal dengan migrasi atau diagram tranfernya.
c. Memperoleh titik *equilibrium* (kesetimbangan) model SIR tersebut dan kestabilan titik kesetimbangannya.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diambil dalam penelitian ini adalah:

a. Menambah wawasan yang mendalam tentang pemodelan matematika, khususnya mengenai model SIR dan penerapannya. Dapat memodelkan penyebaran penyakit fatal menggunakan model SIR dengan migrasi, mengetahui perilaku penyebaran penyakit dan laju penyebarannya.
b. Memperoleh ilmu pengetahuan bagi kita semua khususnya tentang kestabilan titik *equilibrium* model SIR penyakit fatal dengan migrasi, dan sebagai sarana informasi bagi pembaca serta dapat dijadikan bahan referensi bagi pihak yang membutuhkan.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini terdiri dari beberapa bab yaitu :

**Bab I Pendahuluan**

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

**Bab II Landasan Teori**

Bab ini berisikan landasan teori yang digunakan, seperti sistem persamaan diferensial, titik kesetimbangan (*equilibrium*), kestabilan titik kesetimbangan, matriks Jacobian, nilai eigen dan model SIR.

**Bab III Metodologi**

Bab ini berisikan langkah-langkah yang penulis gunakan untuk menyelesaikan kestabilan titik *equilibrium* model SIR penyakit fatal dengan migrasi.

**Bab IV Pembahasan**

Bab ini berisikan pembahasan mengenai model matematika untuk memodelkan penyebaran penyakit fatal menggunakan model SIR dengan migrasi dan menentukan kestabilan titik *equilibrium*, yang terdiri dari : asumsi-asumsi dalam model, model SIR, titik kesetimbangan penyakit (*equilibrium*), kestabilan titik kesetimbangan penyakit dan simulasi.

**Bab V Penutup**

Bab ini berisikan kesimpulan dari seluruh uraian pada pembahasan dan saran-saran untuk para pembaca.

# BAB II
# LANDASAN TEORI

## 2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas, sedangkan sistem persamaan diferensial terdiri dari beberapa (dua atau lebih) persamaan diferensial.

Diberikan sistem persamaan diferensial :

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

dengan $\dot{x} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right)^T$, $f = (f_1, f_2, \dots f_n)^T$, dan $x = (x_1, x_2, \dots x_n)^T$ $\in \mathbb{R}^n$.

Sistem persamaan diferensial (2.1) dapat ditulis dalam bentuk sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_{1,}\, x_2 \dots x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_{1,}\, x_2 \dots x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_{1,}\, x_2 \dots x_n) \end{aligned} \tag{2.2}$$

dengan $f_i$ adalah fungsi nonlinear, untuk $i = 1,2, \dots, n$.

Jika $f_1, f_2, \dots, f_n$ pada sistem (2.2) masing-masing linear dalam $x_1, x_2, \dots, x_n$, maka sistem persamaan diferensial (2.2) tersebut dapat dikatakan linear. Dan jika sistem (2.2) linear, maka sistem persamaan diferensial (2.2) tersebut dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{2.3}$$

Kemudian sistem persamaan diferensial (2.3) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\dot{x} = Ax,$$

dengan $A$ matriks ukuran $n \times n$ dan $x \in E$ ; $E \subseteq R^n$.

**Definisi 2.1 (Perko, 1991)** Diberikan $E \subseteq R^n$**,** $E$ himpunan terbuka, dan $f_i \in C(E, R)$, $i = 1,2, \dots, n$. Vektor $x(t) \in R^n$ disebut penyelesaian sistem (2.1) pada interval $I$ jika $x(t)$ diferensiabel pada $I$ dan $\frac{dx}{dt} = f(x(t))$ untuk setiap $t \in I$ dan $x(t) \in E$.

## 2.2 Titik Kesetimbangan (*Equilibrium*)

Suatu sistem yang tidak berubah sepanjang waktu dapat disebut setimbang, dan kesetimbangan pada populasi dapat diartikan sebagai " jumlah populasi tersebut tidak berubah sepanjang waktu". Berikut didefinisikan titik kesetimbangan (*equilibrium*) dari sistem (2.1) :

**Definisi 2.2 (Perko, 1991)** Titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan (titik *equilibrium*) dari sistem (2.1) jika $f(\bar{x}) = 0$.

Model penyebaran penyakit umumnya mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit. Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah suatu kondisi dimana tidak ada lagi penyakit yang menyerang dalam populasi atau dapat dikatakan tidak ada individu yang terinfeksi penyakit. Sebaliknya, sedangkan titik kesetimbangan endemik penyakit adalah suatu kondisi dimana penyakit selalu saja ada dalam populasi tersebut, berarti selalu ada saja individu yang terinfeksi penyakit.

## 2.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Kestabilan titik kesetimbangan dikenal sebagai konsep perilaku sistem pada titik kesetimbangan (*equilibrium*). Kestabilan tersebut merupakan pengetahuan untuk menggambarkan perilaku sistem.

Di bawah ini diberikan definisi matematis mengenai kestabilan titik kesetimbangan (*equilibrium*):

**Definisi 2.3 (Hale, 1991)** Titik kesetimbangan (*equilibrium*) $\bar{x} \in R^n$ dari sistem (2.1) dikatakan :

a. Stabil lokal jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi sistem (2.1) $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$ maka berakibat $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.

b. Stabil asimtotik lokal jika titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta_0$ maka berakibat $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$.

c. Tidak stabil jika titik e*quilibrium* $\bar{x} \in R^n$ tak memenuhi (a) .

Keterangan di atas menjelaskan tentang kestabilan di dekat titik kesetimbangan yang bersifat lokal saja. Untuk kestabilan globalnya, maka dapat ditentukan melalui pernyataan berikut ini:

"Jika untuk sembarang titik awal, solusi sistem persamaan diferensial $x(t)$ berada dekat dengan titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$, maka titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ stabil global. Namun jika untuk sembarang titik awal solusi sistem persamaan diferensial $x(t)$ berada dekat dengan titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ dan untuk $t$ membesar menuju tak hingga $x(t)$ konvergen ke $\bar{x} \in R^n$, maka titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ stabil asimtotik global".

Dibutuhkan metode lain yang lebih mudah penerapannya dalam penentuan kestabilan didekat titik *equilibrium.* Metode tersebut adalah metode linearisasi. Metode linearisasi digunakan untuk mengetahui perilaku sistem persamaan diferensial yang tidak dapat ditentukan penyelesaian eksaknya. Dan sifat kestabilan titik *equilibrium* pada sistem (2.1) dapat didekati dengan menggunakan metode linearisasi ini. Sebelum penyelesaian dengan metode linearisasi, maka perlu ditentukan terlebih dahulu matrik Jacobian di titik $\bar{x}$. Sebab, penyelesaian dengan metode linearisasi hanya dapat dilakukan setelah ditentukan matriks Jacobian.

### 2.4. Matriks Jacobian

**Definisi 2.4 (Hale, 1991)** Diberikan $f = (f_1, \dots, f_n)$ pada sistem (2.1) di atas dengan $f_i \in c^1(E), i = 1,2, \dots, n$.

Matriks :

$$J\big(f(x)\big) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

dinamakan matriks Jacobian dari $f$ di titik $x$.

Selanjutnya, akan dilakukan penyelesaian dengan metode linearisasi. Berikut ini definisi metode linearisasi :

**Definisi 2.5 (Meiss, 2007)** Sistem $\dot{x} = J\big(f(\bar{x})\big)$ disebut linearisasi sistem (2.1) di $(\bar{x})$.

Setelah proses linearisasi dilakukan pada sistem (2.1), kemudian perilaku kestabilan di sekitar titik *equilibrium* dapat ditentukan. Kestabilan dari titik *equilibrium* pada sistem (2.1) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen matriks Jacobian pada metode linearisasi. Nilai eigen tersebut dapat ditentukan melalui persamaan karakterisrik dari matriks Jacobian di titik $\bar{x}$.

### 2.6 Nilai Eigen

Kriteria kestabilan titik *equilibrium* pada sistem (2.1) disajikan pada teorema di bawah ini :

**Teorema 2.1 (Wiggins, 1990)**

a) Jika semua nilai eigen dari matriks jacobian $J(f(\bar{x}))$ mempunyai bagian real negatif, maka titik equilibrium $\bar{x}$ dari sistem (2.1) stabil asimtotik.
b) Jika terdapat nilai eigen dari matriks $J(f(\bar{x}))$ mempunyai bagian real positif, maka titik equilibrium $\bar{x}$ dari sistem (2.1) tidak stabil.

Jika persamaan karakteristik yang diperoleh cukup rumit untuk mencari akar-akar karakteristiknya yaitu dengan nilai eigen matrik, maka untuk menentukan apakah nilai eigen bernilai negatif dapat menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

**Teorema 2.2** Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz

Diberikan persamaan karakteristik $\mathrm{P}(\lambda) = \lambda^{n} + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$. Untuk n=2, kondisi Routh-Hurwitz sebagai berikut : $a_1 > 0, a_2 > 0$. Untuk n=3, kondisi Routh-Hurwitz sebagai berikut : $a_3 > 0, a_1 > 0, a_1a_2 > a_3$. Jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, maka titik ekuilibrium stabil asimtotik lokal.

Di bawah ini akan diberikan bentuk khusus mengenai kestabilan titik kesetimbangan untuk sistem linear dengan 2 persamaan.

Pandang sistem linear :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

dengan $a, b, c$ dan $d$ konstan.

Misalkan $\lambda$ nilai eigen dari Matriks A $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka diperoleh persamaan karakteristik :

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0 \tag{2.5}$$

Berdasarkan persamaan (2.5) di atas, diperoleh:

$$\lambda_{1.2} = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2},$$

atau

$$\lambda_{1.2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

dengan $p = a + d$ dan $q = ad - bc$.

Stabilitas sistem linier (2.1) dapat diterangkan sebagai berikut:

1). $\lambda_{1.2}$ real dan berbeda jika $\Delta = p^2 - 4q > 0$

a. $\lambda_{1.2}$ sama tanda jika $q > 0$ :

- $\lambda_{1.2}$ semua positif jika $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.

- $\lambda_{1.2}$ semua negatif jika $p < 0$ → stabil.

b. $\lambda_{1.2}$ beda tanda jika $q < 0$ → tidak stabil.

c. Salah satu dari $\lambda_{1.2}$ nol, jika $q = 0$.

- Akar lainnya positif jika $p > 0$ → tidak stabil.
- Akar lainnya negatif jika $p < 0$ → stabil netral.

2). $\lambda_{1.2}$ real dan sama jika $\Delta = 0$.

a. $\lambda_{1.2}$ sama tanda :

- Keduanya positif jika $p > 0$ → tidak stabil.
- Keduanya negatif jika $p < 0$ → stabil.

b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, bila $p > 0$ → tidak stabil.

3). $\lambda_{1.2}$ kompleks bila $\Delta < 0$.

a. Re $\lambda_{1.2}$ sama tanda :

- Re $\lambda_{1.2}$ semua positif bila $p > 0$ → tidak stabil.
- Re $\lambda_{1.2}$ semua negatif bila $p < 0$ → stabil.

b. Re $\lambda_{1.2}$ bila $p = 0$ → stabil netral

## 2.7 Model SIR

Pemodelan matematika merupakan salah satu terapan dari ilmu matematika yang dapat digunakan untuk mendeskripsikan permasalahan-permasalahan yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari ke dalam bentuk yang matematis. Dengan pemodelan matematika, permasalahan-permasalahan tersebut akan menjadi lebih mudah untuk diselesaikan.

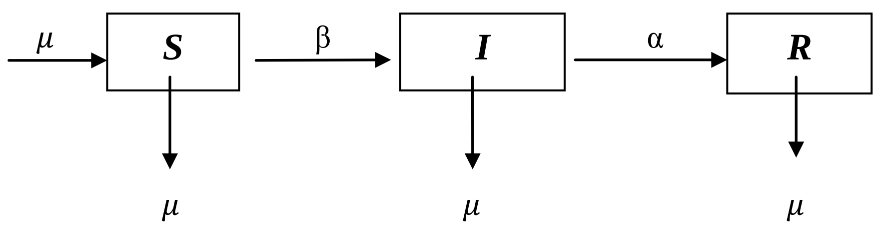
Beberapa model matematika untuk memodelkan penyebaran penyakit antara lain : Model SIR, SIS, SEIR, SIAR. Dari model-model tersebut dapat dibuat persamaan-persamaan yang dapat mendeskripsikan keadaan-keadaan dari suatu penyebaran penyakit menular atau mewabah yang sedang dibicarakan. Dan salah satunya yaitu model SIR, yang merupakan model matematika untuk memodelkan penyebaran penyakit, bisa menggambarkan kondisi tersebut.

Di bawah ini akan diberikan contoh model SIR yang tidak menimbulkan kematian seperti jurnal yang dibahas Husni Tamrin dkk tentang model SIR penyakit tidak fatal, yang diasumsikan memiliki jumlah tetap dan dalam satu periode, dalam populasi terjadi proses kelahiran dan kematian, dengan laju kelahiran sama dengan laju kematian. Pada model ini diasumsikan bahwa individu yang lahir masuk ke kelas *susceptible* dan jumlah populasi konstan dengan $S$ adalah proporsi individu *susceptible*, $I$ adalah proporsi individu *infected*, dan $R$ adalah proporsi individu *recovered* sehingga jumlah proporsi $S + I + R = 1$.

Asumsi-asumsi pada model:

- Populasi tertutup (tidak ada proses migrasi).
- Dalam populasi terjadi proses kelahiran dan kematian dengan laju kelahiran dan kematian sama, dan dinyatakan dengan $\mu > 0$.
- Penyakit dapat disembuhkan.
- Setiap individu yang belum terserang penyakit masuk ke subpopulasi *susceptible* (rentan terserang).
- Laju penularan penyakit dari *susceptible* menjadi *infected* adalah konstan, dan dinyatakan dengan $\beta > 0$.
- Laju kesembuhan penyakit dari *Infected* menjadi *recovered* adalah konstan, dan dinyatakan dengan $\alpha > 0$.
- Individu yang sembuh mempunyai kekebalan tubuh (imunitas).

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, maka didapat diagram alir model SIR seperti gambar di bawah ini :




Gambar 2.1 Model SIR penyakit tidak fatal

Berdasarkan model pada gambar (2.1) diagram alir di atas, maka diketahui sistem persamaan diferensial (2.6) sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \mu - \mu S \tag{2.6a}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I - \mu I \tag{2.6b}$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I - \mu R \tag{2.6c}$$

dengan $S + I + R = 1$ .

Penyelesaian sistem (2.6) adalah himpunan $\Gamma_1 = \{(S, I, R) \mid S + I + R = 1\}$ dengan $S, I, R \geq 0$. Oleh karena $R = 1 - I - S$, dan $R$ (pada persamaan 2.6c) dapat diperoleh nilainya setelah I dan S ditentukan maka persamaan (2.6c) diabaikan terlebih dahulu sehingga sistem persamaan (2.6) menjadi :

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \mu - \mu S \tag{2.7}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I - \mu I$$

dengan $S + I \leq 1$.

Solusi sistem (2.7) adalah himpunan $\Gamma_2 = \{(S, I) | S + I \leq 1\ ;\ S, I \geq 0\}$. Setelah diperoleh sistem persamaan differensial dari model di atas, selanjutnya akan ditentukan titik kesetimbangan (*equilibrium*). Pada titik kesetimbangan tersebut, akan dicari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit.

1. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit, berarti dalam populasi tidak ada individu yang sakit atau $I = 0$. Untuk mendapatkan titik kesetimbangan pada sistem (2.7), maka persamaan (2.7.a) dan persamaan (2.7b) diberi nilai nol atau sama dengan nol, sehingga sistem (2.7) menjadi :

$$-\beta SI + \mu - \mu S = 0$$

$$\beta SI - \alpha I - \mu I = 0 \tag{2.8}$$

Dan untuk mendapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit, maka dilakukan penyelesaian di bawah ini :

$$-\beta S(0) + \mu - \mu S = 0$$
$$\mu - \mu S = 0$$
$$\mu(1 - S) = 0$$

Sehingga diperoleh $S$ untuk titik kesetimbangan bebas penyakit yang dinotasikan dengan $S^* = 1$.

Dari penyelesaian di atas, maka diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $(S^*, I^*) = (1{,}0)$.

2. Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit

Jika suatu populasi mempunyai titik kesetimbangan endemik penyakit berati di dalam populasi tersebut selalu terdapat individu yang terserang penyakit yang sedang dibicarakan atau $I > 0$. Dari persamaan kedua pada sistem (2.8) di atas, maka :

$$\beta SI - \alpha I - \mu I = 0$$
$$I(\beta S - \alpha - \mu) = 0$$

Karena $I > 0$, maka :

$$\beta S = \alpha + \mu$$

Sehingga diperoleh $S$ untuk titik kesetimbangan endemik penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{S} = \frac{\alpha+\mu}{\beta}$.

Kemudian substitusikan (masukkan) $\hat{S}$ ke dalam persamaan pertama pada sistem (2.8) di atas, sehingga :

$$-\beta SI + \mu - \mu S = 0$$
$$-\beta\left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}\right)I = \mu - \mu\left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}\right)$$
$$(\alpha + \mu)I = \mu - \mu\left(\frac{\alpha+\mu}{\beta}\right)$$
$$I = \frac{\mu-\mu\left(\frac{\alpha+\mu}{\beta}\right)}{(\alpha+\mu)}$$
$$I = \frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu}{\beta}$$

Diperoleh $I$ untuk titik kesetimbangan endemik penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{I} = \frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu}{\beta}$. Berdasarkan penyelesian di atas, diperoleh titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{S}, \hat{I}) = \left(\frac{\alpha+\mu}{\beta}, \frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu}{\beta}\right)$.

Setelah diperoleh titik kesetimbangan, selanjutnya akan diselidiki kestabilan titik kesetimbangan tersebut. Kestabilan titik kesetimbangan pada contoh model SIR di atas dapat dilihat pada uraian berikut :

Misalkan

$$f_1(S, I) = -\beta SI + \mu - \mu S$$

$$f_2(S, I) = \beta SI - \alpha I - \mu I$$

Kemudian masing-masing fungsi diturunkan secara parsial terhadap variabel pada fungsi tersebut, seperti di bawah ini :

a. Fungsi $f_1(S, I)$ diturunkan terhadap variabel $S$ :

$$\frac{\partial f_1(S,I)}{\partial S} = \frac{\partial(-\beta SI + \mu - \mu S)}{\partial S} = -\beta I - \mu$$

b. Fungsi $f_1(S, I)$ diturunkan terhadap variabel $I$ :

$$\frac{\partial f_1(S,I)}{\partial I} = \frac{\partial(-\beta SI + \mu - \mu S)}{\partial I} = -\beta S$$

c. Fungsi $f_2(S, I)$ diturunkan terhadap variabel $S$ :

$$\frac{\partial f_2(S,I)}{\partial S} = \frac{\partial(\beta SI - \alpha I - \mu I)}{\partial S} = \beta I$$

d. Fungsi $f_2(S, I)$ diturunkan terhadap variabel $I$ :

$$\frac{\partial f_2(S,I)}{\partial I} = \frac{\partial(\beta SI - \alpha I - \mu I)}{\partial I} = \beta S - \alpha - \mu$$

✓ **Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit $(S^*, I^*) = (1, 0)$**

**Teorema 2.2 (Husni Tamrin, 2007)** Jika $\beta < \alpha + \mu$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit $(S^* I^*, ) = (1,0)$ stabil asimtotik.

Bukti :

Dari penurunan parsial pada $f_1$ dan $f_2$ yang telah dijelaskan di atas, maka didapat matriks Jacobian :

$$Jf(S,I) = \begin{bmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha - \mu \end{bmatrix}$$

Oleh karena titik kesetimbangan $(S^* I^*,) = (1,0)$, maka matriks Jacobian $Jf(S,I)$ berubah menjadi :

$$Jf(S^*, I^*) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta \\ 0 & \beta - \alpha - \mu \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari determinannya untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks Jacobian.

$$\left(\lambda I - Jf(S^*, I^*)\right) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mu & -\beta \\ 0 & \beta - \alpha - \mu \end{bmatrix}$$

$$\left(\lambda I - Jf(S^*, I^*)\right) = \begin{bmatrix} \lambda + \mu & \beta \\ 0 & \lambda - [\beta - \alpha - \mu] \end{bmatrix}$$

Det $\left(\lambda I - Jf(S^*, I^*)\right) = 0$

det $\left(\begin{bmatrix} \lambda + \mu & \beta \\ 0 & \lambda - [\beta - \alpha - \mu] \end{bmatrix}\right) = 0$

Berdasarkan determinan matriks di atas, maka diperoleh persamaan karakteristik :

$$(\lambda + \mu)(\lambda - \beta + \alpha + \mu) = 0$$

Diperoleh $\lambda_1 = -\mu$ dan $\lambda_2 = \beta - \alpha - \mu$. Jelas bahwa $\lambda_1 = -\mu < 0$ dan diperoleh bahwa nilai $\lambda_2 = \beta - \alpha - \mu < 0 \Leftrightarrow \beta < \alpha + \mu$. Jadi, terbukti bahwa jika $\beta < \alpha + \mu$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit $(S,I) = (1,0)$ stabil asimtotik.

Berdasarkan penyelesaian di atas, diperoleh bahwa jika laju penularan penyakit lebih sedikit dari laju kesembuhan penyakit ditambah dengan laju kelahiran, maka titik kesetimbangan bebas penyakit $(S^*, I^*) = (0,1)$ stabil asimtotik yang berarti bahwa dalam jangka waktu yang lama tidak ada penyakit dalam populasi.

- ✓ **Titik kesetimbangan endemik penyakit** $\boldsymbol{(\widehat{S},\widehat{I}) = \left(\frac{\alpha+\mu}{\beta}, \frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu}{\beta}\right)}$

**Teorema 2.3 (Tamrin H. dkk, 2007)** Titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{S},\hat{I}) = \left(\frac{\alpha+\mu}{\beta}, \frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu}{\beta}\right)$ stabil asimtotik jika $\beta > \alpha + \mu$.

Bukti :

Sama halnya seperti penyelesaian pada titik kesetimbangan bebas penyakit, maka akan ditentukan matriks Jacobian dari penurunan parsial pada $f_1$ dan $f_2$ di atas.

$$Jf(S,I) = \begin{bmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha - \mu \end{bmatrix}$$

Karena titik endemik penyakit $(\hat{S},\hat{I}) = \left(\frac{\alpha+\mu}{\beta}, \frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu}{\beta}\right)$, maka matrik di atas berubah menjadi :

$$Jf(\hat{S},\hat{I}) = \begin{bmatrix} -\beta\left(\frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu}{\beta}\right) - \mu & -\alpha-\mu \\ \beta\left(\frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu}{\beta}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-\beta\mu}{\alpha+\mu} & -\alpha-\mu \\ \frac{\beta\mu}{\alpha+\mu} - \mu & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks Jacobian dicari $\det\left(\lambda I - Jf(\widehat{S},\hat{I})\right) = 0$

$$\left(\lambda I - Jf(\widehat{S},\hat{I})\right) = \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-\beta\mu}{\alpha+\mu} & -\alpha-\mu \\ \frac{\beta\mu}{\alpha+\mu} - \mu & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\lambda I - Jf(\widehat{S},\hat{I})\right) = \begin{bmatrix} \lambda + \frac{\beta\mu}{\alpha+\mu} & \alpha+\mu \\ -\frac{\beta\mu}{\alpha+\mu} + \mu & \lambda \end{bmatrix}$$

$\det\left(\lambda I - Jf(\widehat{S},\hat{I})\right) = 0$, berarti

$$\det\begin{bmatrix} \lambda + \frac{\beta\mu}{\alpha+\mu} & \alpha+\mu \\ -\frac{\beta\mu}{\alpha+\mu} + \mu & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Maka diperoleh persamaan karakteristik berikut:

$$(\lambda^2 + \frac{\beta\mu}{\alpha+\mu}\lambda + \mu(\beta - \alpha - \mu) = 0$$

nilai eigen pada persamaan karakteristik tersebut dapat dihitung :

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{\beta\mu}{\alpha+\mu} + \sqrt{\left(\frac{\beta\mu}{\alpha+\mu}\right)^2 - 4\mu(\beta-\alpha-\mu)}}{2}$$

dan

$$\lambda_2 = \frac{-\frac{\beta\mu}{\alpha+\mu} - \sqrt{\left(\frac{\beta\mu}{\alpha+\mu}\right)^2 - 4\mu(\beta-\alpha-\mu)}}{2}$$

- ❖ Untuk $\lambda_1$ : bagian real dari $\lambda_1 < 0$ atau $-\frac{\beta\mu}{(\alpha+\mu)} < 0$. Karena $\beta > \alpha + \mu$, maka $\beta - \alpha - \mu > 0$ sehingga $4\mu(\beta - \alpha - \mu) > 0$, sehingga $\lambda_1 < 0$.
- ❖ Untuk $\lambda_2$ : bagian real dari $\lambda_2 < 0$ atau $-\frac{\beta\mu}{(\alpha+\mu)} < 0$, karena $\beta > \alpha + \mu$ maka $\beta - \alpha - \mu > 0$ sehingga $4\mu(\beta - \alpha - \mu) > 0$, sehingga $\lambda_2 < 0$.

Dari uraian-uraian penyelesaian tersebut di atas, maka dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{S}, \hat{I}) = \left(\frac{\alpha+\mu}{\beta}, \frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu}{\beta}\right)$ stabil asimtotik jika $\beta > \alpha + \mu$, yang artinya bahwa dalam populasi selalu terdapat individu yang terinfeksi penyakit jika laju penularan lebih besar dari laju kesembuhan ditambah laju kematian.

# BAB III
# METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi yang digunakan dalam penelitian ini yakni :

a) Studi literatur atau studi pustaka, mempelajari buku-buku yang berkaitan dengan pemodelan matematika khususnya tentang model SIR.
b) Merumuskan masalah, menentukan rumusan masalah yang akan dibahas.
c) Membuat asumsi-asumsi dalam model, di antaranya adanya kelahiran dan kematian alami, kematian akibat penyakit yang dibicarakan dan migrasi konstan.
d) Membuat model matematika, yaitu model SIR dengan beberapa asumsi yang telah dibuat sebelumnya di atas.
e) Menentukan titik kesetimbangan (*equilibrium*), yakni titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit..
f) Menganalisa kestabilan titik kesetimbangan tersebut ( pada point e ), apakah stabil, stabil asimtotik atau tidak.
g) Menyimpulkan hasil dari analisis kestabilan titik kesetimbangan, dari kestabilan asimtotik akan diperoleh kesimpulan bahwa individu dalam suatu populasi bebas penyakit maupun terinfeksi penyakit.

# BAB IV
# PEMBAHASAN DAN HASIL

Pemodelan matematika merupakan suatu alat dalam ilmu matematika yang dapat digunakan untuk membantu mempermudah penyelesaian masalah dalam kehidupan nyata ke dalam model matematis dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu. Selanjutnya dari model yang didapat, dicari solusinya. Pemodelan matematika juga dapat digunakan untuk memodelkan penyebaran penyakit dalam populasi.

Pada bab ini dibahas mengenai model SIR penyakit fatal (yang dapat menimbulkan kematian). Pada model, populasi dibagi menjadi tiga kelas yaitu kelas *susceptible* atau kelas yang berisi individu-individu rentan terhadap penyakit, dan kelas *infected* atau kelas yang berisi individu-individu terinfeksi penyakit dan dapat menularkan penyakit, serta kelas *recovered* yang berarti kelas yang berisi individu-individu yang telah sembuh dari penyakit.

Jika $S(t)$ menyatakan jumlah individu yang rentan terhadap penyakit (*susceptible)* pada saat *t*, $I(t)$ menyatakan jumlah individu terinfeksi (*infected*) pada saat *t*, dan $R(t)$ menyatakan jumlah individu yang *recovered* atau sembuh, serta $N(t)$ menyatakan jumlah populasi pada saat *t*, maka $S(t) + I(t) + R(t) = N(t)$.

## 4.1 Asumsi - Asumsi dalam Model

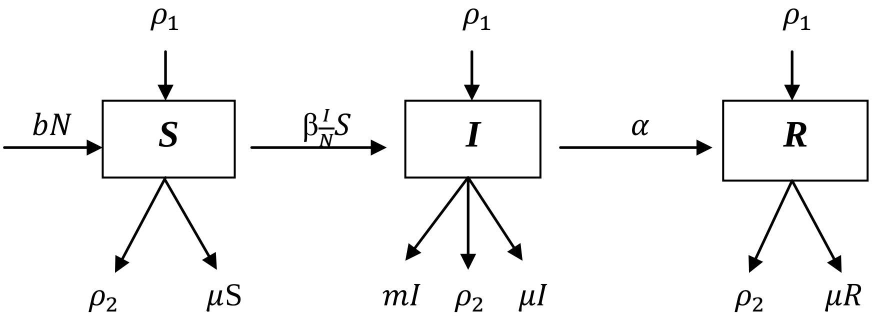
Asumsi-asumsi atau catatan-catatan yang diberikan dalam model SIR ini di antaranya sebagai berikut :

1) Dalam populasi terjadi proses migrasi, dengan laju imigrasi besarnya konstan $\rho_1 > 0$, dan laju emigrasi besarnya konstan $\rho_2 > 0$.
2) Adanya proses kelahiran dan kematian alami dalam populasi dengan laju kelahiran konstan $b > 0$ dan laju kematian konstan $\mu > 0$.
3) Laju penularan penyakit dari *susceptible* menjadi *infected* adalah konstan dan dinyatakan dengan $\beta > 0$.

4) Laju kesembuhan penyakit dari *infected* menjadi *recovered* adalah konstan dan dinyatakan dengan $\alpha > 0$.
5) Laju kematian akibat penyakit yang dibicarakan adalah konstan dan dinyatakan dengan $m > 0$.

## 4.2 Model SIR

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut pada 4.1 di atas, maka dapat dibuat diagram alir model SIR seperti gambar berikut:




Gambar 4.1 Model SIR Penyakit Fatal dengan Migrasi

Dari model gambar di atas, maka diperoleh sistem persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= bN - \beta \frac{I}{N} S + \rho_1 S - \rho_2 S - \mu S \\
\frac{dI}{dt} &= \beta \frac{I}{N} S + \rho_1 I - mI - \rho_2 I - \mu I - \alpha I \qquad (4.1) \\
\frac{dR}{dt} &= \alpha I + \rho_1 R - \rho_2 R - \mu R
\end{aligned}$$

dengan $S + I + R = N$ merupakan jumlah populasi keseluruhan.

## 4.3 Titik Kesetimbangan (*Equilibrium*)

Titik kesetimbangan (*equilibrium*) dari sistem (4.1) dapat ditentukan dalam dua keadaan, yaitu : titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit. Titik kesetimbangan bebas penyakit artinya tidak ada individu yang terserang penyakit dalam populasi, sedangkan titik kesetimbangan endemik penyakit artinya selalu ada individu yang terserang penyakit.

1. Titik kesetimbangan bebas penyakit ($I = 0$)

   Untuk mendapatkan titik kesetimbangan sistem (4.1), maka persamaan-persamaan pada sistem (4.1) diberi nilai nol, sehingga sistem (4.1) menjadi :

$$bN - \beta \frac{I}{N} S + \rho_1 S - \rho_2 S - \mu S = 0$$
$$bN + \rho_1 S - \rho_2 S - \mu S = 0$$
$$bN + (\rho_1 - \rho_2 - \mu) S = 0$$
$$bN - (\mu - \rho_1 + \rho_2) S = 0$$
$$(\mu - \rho_1 + \rho_2) S = bN$$

sehingga diperoleh $S$ untuk titik kesetimbangan bebas penyakit yang dinotasikan dengan $S^*$, yaitu $S^* = \frac{bN}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)}$ ,dengan syarat $\mu > \rho_1 - \rho_2$.

Berdasarkan penyelesaian di atas, maka diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $(S^*, I^*) = \left(\frac{bN}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)}, 0\right)$ dengan syarat $\mu > \rho_1 - \rho_2$.

2. Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit ($I > 0$)

   Titik kesetimbangan endemik penyakit artinya selalu ada penyakit dalam populasi. Dari persamaan kedua pada sistem (4.1) maka :

$$\beta \frac{I}{N} S + \rho_1 I - mI - \rho_2 I - \mu I - \alpha I = 0$$
$$(\beta \frac{S}{N} + \rho_1 - m - \rho_2 - \mu - \alpha) I = 0$$
$$\left(\beta \frac{S}{N} + \rho_1 - m - \rho_2 - \mu - \alpha\right) = 0$$
$$\beta \frac{S}{N} = -\rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha$$

Sehingga diperoleh $S$ untuk titik kesetimbangan endemik penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{S}$, yaitu $\hat{S} = \frac{-\rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha}{\beta} N$.

Selanjutnya substitusikan $\hat{S}$ ke dalam persamaan pertama pada sistem 4.1 di atas, sehingga :

$$bN - \beta \frac{I}{N} S + \rho_1 S - \rho_2 S - \mu S = 0$$

$$bN - \beta \frac{I}{N} \left( \frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta} N \right) + \rho_1 \left( \frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta} N \right) -$$
$$\rho_2 \left( \frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta} N \right) - \mu \left( \frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta} N \right) = 0$$

$$bN - I(-\rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha) + \rho_1 \left( \frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta} N \right) -$$
$$\rho_2 \left( \frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta} N \right) - \mu \left( \frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta} N \right) = 0$$

$$bN - I(-\rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha) =$$
$$-\rho_1 \left( \frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta} N \right) + \rho_2 \left( \frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta} N \right) + \mu \left( \frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta} N \right)$$

$$-I(-\rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha) =$$
$$-\rho_1 \left( \frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta} N \right) + \rho_2 \left( \frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta} N \right) + \mu \left( \frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta} N \right) - bN$$

$$I(-\rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha) =$$
$$\rho_1 \left( \frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta} N \right) - \rho_2 \left( \frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta} N \right) - \mu \left( \frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta} N \right) + bN$$

$$I = \frac{\rho_1 \left( \frac{-\rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha}{\beta} N \right)}{(-\rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha)} - \frac{\rho_2 \left( \frac{-\rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha}{\beta} N \right)}{(-\rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha)}$$
$$- \frac{\mu \left( \frac{-\rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha}{\beta} N \right)}{(-\rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha)} + bN$$

$$I = \rho_1 \frac{N}{\beta} - \rho_2 \frac{N}{\beta} - \mu \frac{N}{\beta} + bN$$

$$I = N \left( \frac{\rho_1}{\beta} - \frac{\rho_2}{\beta} - \frac{\mu}{\beta} + b \right)$$

Sehingga diperoleh $I$ untuk titik kesetimbangan endemik penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{I}$, yaitu $\hat{I} = (\frac{\rho_1 - \rho_2 - \mu}{\beta} + b)N$.

Berdasarkan penyelesaian di atas, maka diperoleh titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{S}, \hat{I}) = \left( \frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta} N, \left( \frac{\rho_1 - \rho_2 - \mu}{\beta} + b \right) N \right)$

## 4.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan (*equilibrium*)

Setelah diperoleh titik kesetimbangan dari sistem (4.1), maka akan diselidiki kestabilan titik kesetimbangan pada model tersebut. Untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangan pada model tersebut dapat dilihat uraian di bawah ini :

Misalkan :

$$f(S,I) = bN - \beta \frac{I}{N} S \ + \rho_1 S - \rho_2 S - \mu S$$

$$g(S,I) = \beta \frac{I}{N} S + \rho_1 I - mI - \rho_2 I - \mu I - \alpha I$$

Kemudian masing-masing fungsi diturunkan secara parsial terhadap variabel pada fungsi tersebut, seperti di bawah ini :

- Fungsi $f(S,I)$ diturunkan terhadap variabel $S$ :

$$\frac{\partial f(S,I)}{\partial S} = \frac{\partial\left(b(S+I+R) - \beta \frac{I}{N} S + \rho_1 S - \rho_2 S - \mu S\right)}{\partial S} = b - \beta \frac{I}{N} + \rho_1 - \rho_2 - \mu$$

- Fungsi $f(S,I)$ diturunkan terhadap variabel $I$ :

$$\frac{\partial f(S,I)}{\partial I} = \frac{\partial\left(b(S+I+R) - \beta \frac{I}{N} S + \rho_1 S - \rho_2 S - \mu S\right)}{\partial I} = b - \beta \frac{S}{N}$$

- Fungsi $g(S,I)$ diturunkan terhadap variabel $S$ :

$$\frac{\partial g(S,I)}{\partial S} = \frac{\partial(\beta \frac{I}{N} S + \rho_1 I - mI - \rho_2 I - \mu I - \alpha I)}{\partial S} = \beta \frac{I}{N}$$

- Fungsi $g(S,I)$ diturunkan terhadap variabel $I$ :

$$\frac{\partial g(S,I)}{\partial I} = \frac{\partial(\beta \frac{I}{N} S + \rho_1 I - mI - \rho_2 I - \mu I - \alpha I)}{\partial I} = \beta \frac{S}{N} + \rho_1 - m - \rho_2 - \mu - \alpha$$

Selanjutnya akan ditentukan matrik Jacobian dari beberapa turunan parsial di atas, sehingga :

$$Jf(S,I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(S,I)}{\partial S} & \frac{\partial f(S,I)}{\partial I} \\ \frac{\partial g(S,I)}{\partial S} & \frac{\partial g(S,I)}{\partial I} \end{bmatrix}$$

setelah masing-masing fungsi diturunkan secara parsial terhadap variabelnya, maka matriks $Jf(I,S)$ di atas menjadi :

$$Jf(S,I) = \begin{bmatrix} b - \beta\frac{I}{N} + \rho_1 - \rho_2 - \mu & b - \beta\frac{S}{N} \\ \beta\frac{I}{N} & \beta\frac{S}{N} + \rho_1 - m - \rho_2 - \mu - \alpha \end{bmatrix}$$

A. Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit, $(S^*, I^*) = (\frac{bN}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}, 0)$.

**Teorema 4.1 :**

Titik kesetimbangan bebas penyakit $(S^*, I^*) = (\frac{bN}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}, 0)$ stabil asimtotik jika $b + \rho_1 < \rho_2 + \mu$ dan $\beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)} < \rho_2 - \rho_1 + m + \mu + \alpha$.

Bukti :

Berdasarkan matriks Jacobian $Jf(S,I)$ yang telah dibahas sebelumnya di atas, maka substitusikan $\frac{bN}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}$ dan 0 ke dalam matriks $Jf(S,I)$ tersebut sehingga diperoleh matriks $Jf\big((S^*, I^*)\big)$ sbb :

$$Jf(S^*, I^*) = \begin{bmatrix} b + \rho_1 - \rho_2 - \mu & b - \beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)} \\ 0 & \beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)} + \rho_1 - m - \rho_2 - \mu - \alpha \end{bmatrix}$$

Kemudian langkah selanjutnya adalah mencari determinan $\big(\lambda I - Jf((S^*, I^*)\big) = 0$ untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks Jacobian.

Misal matriks $M_1 = (\lambda I - Jf(S^*, I^*))$

$M_1 =$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b + \rho_1 - \rho_2 - \mu & b - \beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)} \\ 0 & \beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)} + \rho_1 - m - \rho_2 - \mu - \alpha \end{bmatrix}$$

$$|M_1| =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - [b + \rho_1 - \rho_2 - \mu] & -b + \beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} \\ 0 & \lambda - \left[\beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} + \rho_1 - m - \rho_2 - \mu - \alpha\right] \end{vmatrix}$$

$$Det \begin{vmatrix} \lambda - [b + \rho_1 - \rho_2 - \mu] & -b + \beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} \\ 0 & \lambda - \left[\beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} + \rho_1 - m - \rho_2 - \mu - \alpha\right] \end{vmatrix} = 0$$

Dari determinan $M_1$ di atas, maka diperoleh persamaan karakteristik :

$$(\lambda - [b + \rho_1 - \rho_2 - \mu])\left(\lambda - \left[\beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} + \rho_1 - m - \rho_2 - \mu - \alpha\right]\right) = 0$$

sehingga nilai-nilai eigen dari persamaan karakteristik di atas adalah:

$\lambda_1 = b + \rho_1 - \rho_2 - \mu$, dan $\lambda_2 = \beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} + \rho_1 - m - \rho_2 - \mu - \alpha$.

Diketahui bahwa $b + \rho_1 < \rho_2 + \mu$ maka $\lambda_1 < 0$, dan $\beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} < \rho_2 - \rho_1 + m + \mu + \alpha$ maka $\lambda_2 < 0$. Itu berarti bahwa untuk $t$ menuju tak hingga (dalam waktu yang lama) tidak ada penyakit dalam populasi jika laju kelahiran ditambah dengan laju imigrasi lebih kecil dari laju emigrasi dan laju kematian alami, dan juga jika dalam populasi besar laju penularan dikali dengan laju kelahiran dibagi dengan laju kematian dikurangi dengan laju imigrasi serta ditambah dengan laju emigrasi lebih kecil dari laju emigrasi dikurangi dengan laju imigrasi ditambah laju kematian akibat penyakit yang dibicarakan, ditambah dengan laju kematian alami dan ditambah dengan laju kesembuhan.

B. Kestabilan titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{S},\hat{I}) = \left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N, \left(\frac{\rho_1-\rho_2-\mu}{\beta}+b\right)N\right)$

**Teorema 4.2 :** Titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{S},\hat{I}) = \left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N, \left(\frac{\rho_1-\rho_2-\mu}{\beta}+b\right)N\right)$ stabil asimtotik jika $b+\rho_1 < m+\rho_2+\mu+\alpha$ dan $b\beta+\rho_1 > \rho_2+\mu$

Bukti :

Sama seperti penyelesaian pada titik kesetimbangan bebas penyakit di atas, maka kestabilan titik kesetimbangan endemik penyakit dapat diselidiki melalui uraian di bawah ini :

Berdasarkan matriks Jacobian $Jf(S,I)$ sebelumnya, maka setelah dimasukkan nilai $\hat{S}$ dan $\hat{I}$ menjadi matriks Jacobian $Jf(\hat{S},\hat{I})$:

$$Jf(\hat{S},\hat{I}) = \begin{bmatrix} b-b\beta & b-(-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha) \\ \rho_1-\rho_2-\mu+b\beta & 0 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya menentukan determinan, $\left(\lambda I - Jf(\hat{S},\hat{I})\right) = 0$. Misalkan matriks $M_2 = \left(\lambda I - Jf(\hat{S},\hat{I})\right)$, maka :

$$M_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - Jf(\hat{S},\hat{I})$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b-b\beta & b+\rho_1-m-\rho_2-\mu-\alpha \\ \rho_1-\rho_2-\mu+b\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \lambda-b+b\beta & -b-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha \\ -\rho_1+\rho_2+\mu-b\beta & \lambda \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks di atas, maka akan dicari $det\left(\lambda I - Jf(\hat{S},\hat{I})\right) = 0$.

$$\det \begin{bmatrix} \lambda-b+b\beta & -b-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha \\ -\rho_1+\rho_2+\mu-b\beta & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik matriks Jacobian di atas adalah :

$$(\lambda-b+b\beta)\lambda - (-b-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha)(-\rho_1+\rho_2+\mu-b\beta) = 0$$

$$\lambda^2 - b\lambda + b\beta\lambda - (-b-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha)(-\rho_1+\rho_2+\mu-b\beta) = 0$$

$$\lambda^2 + (b\beta - b)\lambda - (-b - \rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha)(-\rho_1 + \rho_2 + \mu - b\beta)=0$$

Misalkan $P = (b\beta - b)$ dan $= (-b - \rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha)(-b\beta - \rho_1 + \rho_2 + \mu)$ , maka persamaan karakteristik di atas memiliki akar-akar :

$$\lambda_1 = \frac{-P + \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$$

dan

$$\lambda_2 = \frac{-P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$$

Karena $b + \rho_1 < m + \rho_2 + \mu + \alpha$ dan $b\beta + \rho_1 > \rho_2 + \mu$, maka bagian real pada $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$, sehingga berdasarkan teorema 4.2 titik kesetimbangan endemik penyakit stabil asimtotik, yang berarti bahwa untuk solusi awal yang cukup dekat dengan titik *equilibrium* maka solusi sistem (4.1) akan selalu berada cukup dengan titik *equilibrium*, dan untuk $t$ menuju tak hingga maka solusi Sistem (4.1) akan sama dengan titik *equilibrium* endemik penyakit. Hal ini berarti bahwa untuk $t$ menuju tak hingga selalu ada penyakit dalam populasi jika dalam populasi laju kelahiran ditambah laju imigrasi lebih kecil dari laju kematian(akibat penyakit yang dibicarakan) ditambah laju emigrasi lalu ditambah laju kematian alami dan laju kesembuhan, dan jika laju kelahiran dikali laju penularan ditambah laju imigrasi lebih besar dari laju emigrasi ditambah laju kematian alami.

### 4.5 Simulasi

**a. Titik *Equilibrium* Bebas Penyakit**

Ambil parameter : $b = 0{,}4$ ; $\beta = 0{,}3$; $p_1 = 0{,}1$ ; $p_2 = 0{,}2$; $\mu = 0{,}5$ ; $m = 0{,}6$; $\alpha = 0{,}7$. Lalu, substitusikan nilai parameter tersebut ke dalam sistem (4.1) :

$$\frac{dS}{dt} = 0{,}4 - 0{,}3\,is + 0{,}1\,s - 0{,}2\,s - 0{,}5s$$

$$\frac{dI}{dt} = 0{,}3is + 0{,}1is - 0{,}6i - 0{,}2i - 0{,}5i - 0{,}7i \qquad (4.2)$$

$$\frac{dR}{dt} = 0{,}7i + 0{,}1r - 0{,}2r - 0{,}5r$$

Titik *equilibrium* bebas penyakitnya adalah $(S^*, I^*) = \left(\frac{bN}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}, 0\right)$ stabil asimtotik jika $b + p1 < p2 + \mu$ dan $\beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)} < \rho_2 - \rho_1 + m + \mu + \alpha$. Agar kestabilan titik *equilibrium* bebas penyakitnya dapat ditentukan, maka masukkan nilai-nilai parameter tersebut di atas ke dalam matriks di bawah ini :

$$Jf(S^*, I^*) = \begin{bmatrix} b + \rho_1 - \rho_2 - \mu & b - \beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)} \\ 0 & \beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)} + \rho_1 - m - \rho_2 - \mu - \alpha \end{bmatrix}$$

$$Jf(S^*, I^*) =$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}4 + 0{,}1 - 0{,}2 - 0{,}5 & 0{,}4 - \frac{0{,}3(0{,}4)}{(0{,}5-0{,}1+0{,}2)} \\ 0 & \frac{0{,}3(0{,}4)}{(0{,}5-0{,}1+0{,}2)} + 0{,}1 - 0{,}6 - 0{,}2 - 0{,}5 - 0{,}7 \end{bmatrix}$$

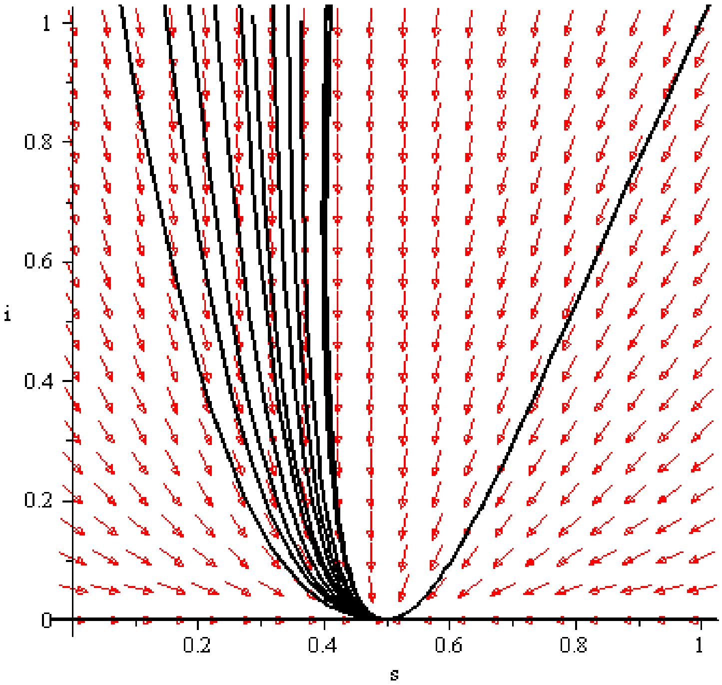
$$Jf(S^*, I^*) = \begin{bmatrix} -0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & -1{,}7 \end{bmatrix}$$

Lalu cari det $((\lambda I - Jf(S^*, I^*))$,

Det $\begin{bmatrix} \lambda + 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & \lambda + 1{,}7 \end{bmatrix} = 0$

Sehingga didapat persamaan karakteristiknya : $(\lambda + 0{,}3)(\lambda + 1{,}7) = 0$

Dari persamaan karakteristiknya, diperoleh nilai-nilai eigen $\lambda_1 = -0{,}3$ dan $\lambda_2 = -1{,}7$. Dan berdasarkan itu dapat disimpulkan bahwa titik equilibrium bebas penyakit stabil asimtotik. Hal tersebut dapat digambarkan seperti gambar (4.2) di bawah ini:




Gambar 4.2 Orbit Kestabilan Titik Kesetimbangan Model SIR Penyakit Fataldengan Migrasi

Berdasarkan gambar (4.2) di atas, bisa dilihat arah trayektori menuju titik equilibrium, sehingga dapat disimpulkan bahwa titik equilibrium bebas penyakit stabil asimtotik.

**b. Titik *Equilibrium* Endemik Penyakit**

Ambil parameter : $b = 0{,}5$ ; $\beta = 0{,}7$; $p_1 = 0{,}3$ ; $p_2 = 0{,}4$; $\mu = 0{,}1$ ; $m = 0{,}6$; $\alpha = 0{,}2$. Lalu, substitusikan nilai parameter tersebut ke dalam sistem (4.1) :

$$\frac{dS}{dt} = 0{,}5 - 0{,}7\,is + 0{,}3\,s - 0{,}4\,s - 0{,}1s$$

$$\frac{dI}{dt} = 0{,}7is + 0{,}3is - 0{,}6i - 0{,}4i - 0{,}1i - 0{,}2i \qquad (4.2)$$

$$\frac{dR}{dt} = 0{,}2i + 0{,}3r - 0{,}4r - 0{,}1r$$

Titik *equilibrium* endemik penyakitnya adalah $(\hat{S},\hat{I}) = \left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N, \left(\frac{\rho_1-\rho_2-\mu}{\beta} + b\right)N\right)$ dengan syarat $b + \rho_1 < m + \rho_2 + \mu + \alpha$ dan $b\beta + \rho_1 > \rho_2 + \mu$. Agar kestabilan titik *equilibrium* bebas penyakitnya dapat ditentukan, maka masukkan nilai-nilai parameter di atas ke dalam matriks di bawah ini :

$$Jf(\hat{S},\hat{I}) = \begin{bmatrix} b - b\beta & b - (-\rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha) \\ \rho_1 - \rho_2 - \mu + b\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$Jf(\hat{S},\hat{I}) =$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 - 0{,}5(0{,}7) & 0{,}5 - (-0{,}3 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}2) \\ 0{,}3 - 0{,}4 - 0{,}1 + 0{,}5(0{,}7) & 0 \end{bmatrix}$$

$$Jf(\hat{S},\hat{I}) = \begin{bmatrix} 0{,}15 & -0{,}5 \\ 0{,}15 & 0 \end{bmatrix}$$

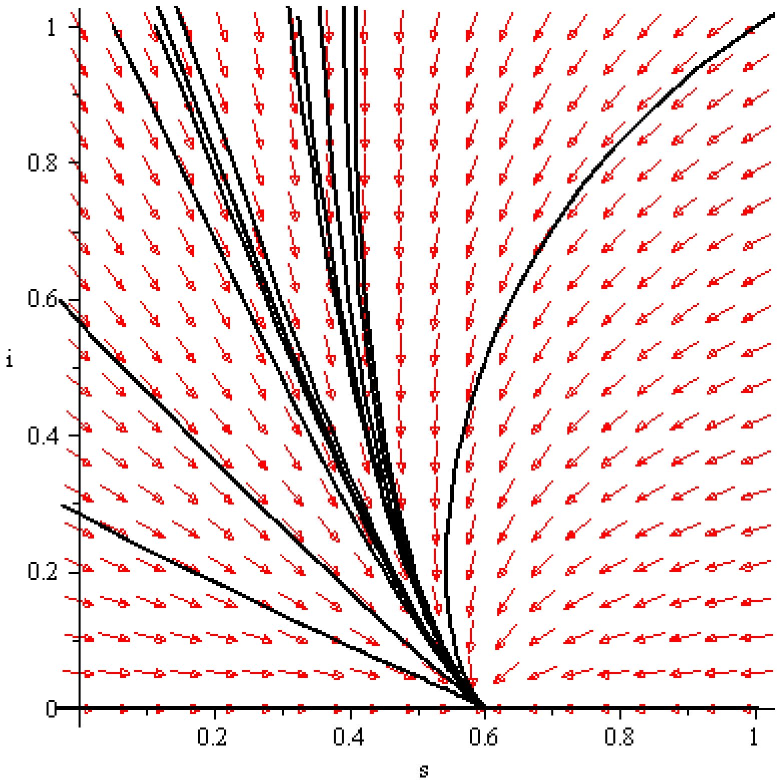
Lalu cari det (($\lambda I - Jf(\hat{S},\hat{I})$,

Det $\begin{bmatrix} \lambda - 0{,}15 & 0{,}5 \\ -0{,}15 & \lambda \end{bmatrix} = 0$

Sehingga didapat persamaan karakteristiknya :

$(\lambda - 0{,}15)(\lambda) - (-0{,}15)(0{,}5) = 0$

Dari persamaan karakteristiknya, diperoleh nilai-nilai eigen $\lambda_1 = -0{,}5$ dan $\lambda_2 = -0{,}75$. Dan berdasarkan itu dapat disimpulkan bahwa titik equilibrium bebas penyakit stabil asimtotik. Hal tersebut dapat digambarkan seperti gambar (4.2) di bawah ini:




Gambar 4.2 Orbit Kestabilan Titik Kesetimbangan Model SIR Penyakit Fataldengan Migrasi

Berdasarkan gambar (4.2) di atas, bisa dilihat arah trayektori menuju titik *equilibrium*, sehingga dapat disimpulkan bahwa titik equilibrium endemik penyakit stabil asimtotik.

# BAB V
# PENUTUP

## 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Model SIR penyakit fatal dengan migrasi adalah :

   $$\frac{dS}{dt} = bN - \beta\frac{I}{N}S + \rho_1 S - \rho_2 S - \mu S$$

   $$\frac{dI}{dt} = \beta\frac{I}{N}S + \rho_1 I - mI - \rho_2 I - \mu I - \alpha I$$

   $$\frac{dR}{dt} = \alpha I + \rho_1 R - \rho_2 R - \mu R$$

   dengan jumlah populasi diasumsikan $S + I + R = N$, dimana $S$, $I$ dan $R$ masing-masing adalah kelas *susceptible,* kelas *infected* dan kelas *recovered* dalam populasi.
2. Ada dua titik kesetimbangan pada model SIR penyakit fatal dengan migrasi yaitu :
   a. Titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu $(S^*, I^*) = (\frac{bN}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}, 0)$ dengan syarat $\mu > \rho_1 + \rho_2$.
   b. Titik kesetimbangan endemik penyakit yaitu $(\hat{S}, \hat{I}) = \left(\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right), \left(\frac{\rho_1-\rho_2-\mu}{\beta} - b\right)N\right)$.

Pada model SIR penyakit fatal dengan migrasi, titik kesetimbangan bebas penyakit $(S^*, I^*) = (\frac{bN}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}, 0)$ stabil asimtotik jika $b + \rho_1 < \rho_2 + \mu$, dan $\beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)} < \rho_2 - \rho_1 + m + \mu + \alpha$, yang berarti pada akhirnya tidak ada penyakit dalam populasi jika laju kelahiran ditambah dengan laju imigrasi lebih kecil dari laju emigrasi ditambah dengan laju kematian, dan juga jika dalam populasi besar laju penularan dikali dengan laju kelahiran dibagi dengan laju kematian dikurangi dengan laju imigrasi serta ditambah dengan laju emigrasi lebih kecil dari laju emigrasi dikurangi dengan laju imigrasi ditambah dengan laju kematian akibat penyakit yang dibicarakan dan dtambah dengan laju kematian dan ditambah dengan laju kesembuhan.

Sedangkan titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{S},\hat{I}) = \left(\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+a}{\beta}N\right),\left(\frac{\rho_1-\rho_2-\mu}{\beta}-b\right)N\right)$ stabil asimtotik jika $b+\rho_1 < m+\rho_2+\mu+a$ dan jika populasi memenuhi kondisi $b\beta+\rho_1 > \rho_2+\mu$, yang berarti bahwa pada akhirnya selalu ada penyakit dalam populasi jika dalam populasi laju kelahiran ditambah laju imigrasi lebih kecil dari laju kematian akibat penyakit yang dibicarakan dan ditambah laju emigrasi ditambah laju kematian alami dan laju kesembuhan, dan jika laju kelahiran dikali dengan laju penularan ditambah laju imigrasi lebih besar dari laju emigrasi ditambah laju kematian alami.

## 5.2 Saran

Tugas akhir ini memodelkan penyebaran penyakit dengan asumsi-asumsi tertentu antara lain adanya proses migrasi, terdapat penyakit fatal sehingga adanya kematian akibat penyakit yang dibicarakan, serta asumsi lainnya. Pada tugas akhir ini juga untuk menyelidiki kestabilan titik kesetimbangan menggunakan metode linearisasi. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini disarankan menambahkan asumsi yang berbeda untuk memodelkan penyebaran penyakit dan menggunakan metode lain untuk menyelidiki kestabilan titik kesetimbangannya seperti metode globalisasi dan sebagainya.

# DAFTAR PUSTAKA


Budiantoro, F. *Kestabilan Global pada Model Endemik SIR dengan Imigran.* Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Sebelas Maret, Surakarta. 2009.

Duf, Y. dan Rui Xu. *A Delayed SIR Epidemic Model With Nonlinear Incidence Rate And Pulse Vaccination.* Math and Informatics. Korean Sigcam and KSCam. 2010.

Guo, H. dkk. *Global Stability Of The Endemic Equilibrium Of Multigroup SIR Epidemic Models.* Aplied Mathematics Institute. University of Alberta. 2006.

Hale, J. K. dan Kocak, H. *Dynamic and Bifurcation.* Springer-verlag. New York. 1991.

Meiss, J. D. *Differential Dynamical Systems.* Society for Industrial and Applied Mathematics. USA. 2007.

Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer-verlag. New York. 1991.

Pratiwi, N. dan Kartono. *Strategi Model Pengendalian Penyebaran Virus Influenza*, Jurnal Matematika Vol. 11, No.3, hal.141-145.ISSN:1410-8518. 2008.

Purba, E.M. *Analisa Model SIR untuk Kasus Epidemi*. Skripsi S1 FMIPA UNRI. Pekanbaru. 2007.

Sriningsih, Riri dan Soleh, M. *Model Pemilihan Kepala Daerah dalam Kompetisi Memperoleh Dukungan (Responden)*

Supriatna, A. K, dkk. *Pembuatan Model Matematika dan Software untuk Penghitungan Tingkat Vaksinasi pada Penyebaran Penyakit Menular.* UNPAD. Bandung. 2005.

Tamrin, H. dkk. *Model SIR Penyakit Tidak Fatal.* Jurnal Matematika Fakultas MIPA UGM. Yogyakarta. 2007.

Wiggins, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*. Springer Verlag. New York. 1990.